Humboldt-Universität
Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 10 Sommersemester 2002

10.1. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie:
a) f ist in jedem von $(0,0)$ verschiedenen Punkt stetig.
b) f ist im Nullpunkt längs jeder Geraden $y = ax, a \in \mathbb{R}$ stetig.
c) f ist im Nullpunkt unstetig.
d) f besitzt im Nullpunkt alle partiellen Ableitungen.

10.2. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x,y) \longmapsto \sqrt{|\,xy\,|}$.
a) Ist f stetig in $(0,0)$?
b) Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.

10.3. Bestimmen Sie lokale Extrempunkte und Sattelpunkte von
a) $f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + 2y^2$
b) $f(x,y) = 8y^3 - 12x^2y^2 + 6x^2 - 3x^4$
c) $f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{y^4}{4}$
d) $f(x,y) = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$

10.4. Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ über M mit
a) $f(x,y) = (x-y)^2 + xy - x, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
b) $f(x,y) = \sin x + \sin y - \sin(x+y)$,
$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi - x\}$
c) $f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2, \quad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$

10.5. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3ax - 3by$. Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f. Stellen Sie die Gleichung der Tangentialebene von f an der Stelle (a,b) auf.

10.6. Beweisen Sie: Unter allen Dreiecken mit gegebenem Umfang U hat ein gleichseitiges den größten Flächeninhalt.
Hinweis: Benutzen Sie die Heronsche Formel.

10.7. Eine nach oben offene Kiste soll ein Volumen von $32\ m^3$ haben. Bestimmen Sie die Abmessungen der Kiste derart, daß der Materialverbrauch minimal wird.