Humboldt-Universität
Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 7 Sommersemester 2002

7.1. Approximieren Sie $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos x$ durch ein Polynom p so, dass gilt

$$|f(x) - p(x)| < 10^{-5}$$

für alle $x \in [-2,2]$.

7.2. Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = 2\sin^2(x)$ an der Entwicklungsstelle $\frac{\pi}{4}$ das Taylorpolynom 3. Grades und nehmen Sie eine Restgliedabschätzung für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ vor.

7.3.
a) Geben Sie das n-te Taylorpolynom $p_n(x)$ zu $\ln(1+x)$ mit Entwicklungstelle 0 an.

b) Schätzen Sie $\ln(1+x_1) - p_n(x_1)$ für $x_1 = -0,1$ ab.

c) Welches n reicht bei der Näherung von $\ln(1+x_1)$ durch $p_n(x_1)$ aus, wenn eine Genauigkeit von $0,5 \cdot 10^{-4}$ erreicht werden soll?

7.4. Beweisen Sie: Für $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ gilt

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

7.5. Schätzen Sie den absoluten Fehler in der folgenden Näherungsformel mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes ab:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

7.6. Bestimmen Sie zu

$$f : \left[-2, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{1}{1-x}$$

das n-te Taylorpolynom p_n bei Entwicklung um den Nullpunkt und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von $(f - p_n)(x)$ für $n \to \infty$.

7.7. Es sei $f(x) = \sqrt[4]{x}$. Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom im Punkt 1 sowie eine Schranke des Fehlers für $|x-1| < \frac{1}{10}$.

7.8. Für welche Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ gilt $f(x) = T_n f(x)$ für alle $x \in D$?