Humboldt-Universität, Inst. für Mathematik, Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 6 Sommersemester 2002

6.1. Es sei $f(x) = x^3 + x + 1, x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:
a) f ist streng monoton wachsend.
b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv.
c) Bestimmen Sie für die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ die Werte $g'(3)$ und $g'(1)$.
(Es ist *nicht* verlangt, die Umkehrfunktion zu bestimmen.)

6.2. Beweisen Sie, dass die folgende Funktion f auf ihrem Definitionsbereich konstant ist. Welchen Wert hat die Konstante?

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\arcsin x, \quad |x| < 1.$$

6.3. Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Dichte der Normalverteilung mit den Parametern μ und σ^2 durch.

6.4. Die Funktion f sei in $[0, a]$ stetig und in $(0, a)$ differenzierbar, und es sei $f(0) = 0$ sowie f' streng monoton wachsend.
Zeigen Sie, dass dann

$$\frac{f(x)}{x}$$

streng monoton wachsend in $(0, a)$ ist.

6.5. Beweisen Sie die Ungleichung:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad \text{für} \quad x > 0.$$

Hinweis: Wenden Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung an.

6.6. Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

definierte Funktion.
a) Bestimmen Sie alle lokalen und absoluten Extrema von f.
b) Bestimmen Sie die maximalen Intervalle $I \subset (0, \infty)$, in denen f konvex bzw. konkav ist.

6.7. Die Funktionen f und g seien auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar und es gelte $f' = g$ und $g' = f$ sowie $f(a) = 1$ und $g(a) = 0$.
Zeigen Sie, daß dann $(f(x))^2 - (g(x))^2 = 1$ für allle $x \in [a, b]$ gilt.