Humboldt-Universität, Inst. für Mathematik, Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 5 Sommersemester 2002

5.1. Kann man reelle Zahlen a, b, c so finden, dass die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{für} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

differenzierbar ist.

5.2. Bilden Sie die links- und rechtsseitigen Ableitungen an der Stelle 3 für folgende Funktionen:

a) $f(x) = |x - 3|$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & \text{für} \quad x \leq 3 \\ \sqrt{3x} & \text{für} \quad x > 3 \end{cases}$

5.3. Untersuchen Sie auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit:

$$f(x) = \begin{cases} (x - 2\pi)^3 + 8 & \text{für} \quad x \leq 2\pi \\ \frac{\sin(4x)}{4} + x + 8 - 2\pi & \text{für} \quad x > 2\pi \end{cases}$$

5.4. Beweisen Sie: Wenn f im Punkt x differenzierbar ist, dann ist

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Belegen Sie durch ein Beispiel, dass der obige Grenzwert existieren kann, ohne dass f in x differenzierbar ist.

5.5. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Beweisen Sie, dass f konstant ist.

5.6. Es seien f und g auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $f(x) > 0$ für alle $x \in I$. Bestimmen Sie die Ableitung von h mit

$$h(x) = f(x)^{g(x)}$$

für alle $x \in I$.

5.7. Es sei P derjenige Punkt der Kurve $(x, \ln x) : x > 0, x \in \mathbb{R}$, der vom Punkt $(1, 1)$ den kleinsten euklidischen Abstand hat.
Zeigen Sie: Die x-Koordinate von P erfüllt die Gleichung $\ln x = 1 + x - x^2$.
Bestimmen Sie eine Näherungslösung dieser Gleichung auf zwei Dezimalstellen genau.