Humboldt-Universität
Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 4 Sommersemester 2002

4.1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Man beweise, dass die Gleichung $\frac{x^2+1}{x-a} + \frac{x^4+1}{x-b} = 0$ eine Lösung x_0 mit $a < x_0 < b$ hat.

4.2. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Zeigen Sie: Es existiert ein $\alpha > 0$, so dass $f(x) \geq \alpha$ für alle $x \in [a, b]$.

4.3. Sei $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}, x \in [0, 1]$.
Zeigen Sie, dass f das Intervall $[0, 1]$ bijektiv auf $[0, 1]$ abbildet, aber nicht monoton ist. Wo ist f stetig?

4.4. Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Beweisen Sie, dass im Intervall $[0, 1]$ ein c existiert mit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$.
Hinwei: Betrachten Sie die Funktion g mit $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ auf einem geeignet gewählten Definitionsbereich.

4.5. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:
a) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$

4.6. Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, streng monoton wachsend und es gelte $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Es werden rekursiv zwei Folgen definiert

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad y_0 = b, \quad y_{n+1} = f(y_n).$$

Man beweise: Die Folgen (x_n) und (y_n) konvergieren jeweils gegen eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$.

4.7. Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos x)}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}}$ d) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right) - \ln x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1-xe^{\frac{x}{2}}}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$

4.8. Welche der folgenden Funktionen lassen sich an den Lücken im Definitionsbereich stetig fortsetzen? Wie lautet gegebenenfalls die stetige Fortsetzung?

a) $f(x) = \frac{2-x}{4-2x}$ b) $f(x) = \frac{1}{1+2^{1/x}}$ c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ e) $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ f) $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

4.9. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte $f(0) = 1$ sowie $f(x + y) \leq f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Man zeige: Ist f im Nullpunkt stetig, so ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.