Humboldt-Universität, Inst. für Mathematik, Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 3 Sommersemester 2002

3.1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{für} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche x diese Funktion stetig ist.

3.2. Untersuchen Sie, ob die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{x(x-1)}{\ln x} & \text{für} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{x^2-1}{x(x-1)} & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

an der Stelle $x = 1$ stetig fortsetzbar ist.

3.3. Prüfen Sie, ob folgende Aussagen richtig sind. Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Wenn f stetig in a ist, so ist auch $|f|$ stetig in a.
b) Wenn $|f|$ stetig in a ist, so ist auch f stetig in a.
c) Wenn f und g stetig in a sind, so ist auch $\max(f, g)$ stetig in a.
d) Wenn $f \cdot g$ stetig in a ist, so sind auch f und g stetig in a.

3.4. Es sei $a \in D \subset \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ eine in a stetige Funktion mit $g(a) = 0$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x) - f(a)| \leq g(x)$ für alle $x \in D$. Beweisen Sie: f ist stetig in a.

3.5. Die Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbf{N}$, seien definiert durch

$$g_n(x) = \frac{x^{2n} - 4}{x^{2n} + 7}.$$

Begründen Sie, daß alle Funktionen g_n stetig sind.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion g mit $g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ stetig?

3.6. Untersuchen Sie die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} |x| \left(x + \frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

3.7. Es sei $D = (0, 1]$. Konstruieren Sie stetige Funktionen f und g auf D mit folgenden Eigenschaften:
a) f ist unbeschränkt.
b) g ist beschränkt, nimmt aber weder Minimum noch Maximum an.