Humboldt-Universität
Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 2 Sommersemester 2002

2.1. Zeigen Sie die Konvergenz und bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$a)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \qquad b)\quad \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 5^{-k} \qquad c)\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

2.2. Die Reihe $\sum_n a_n$ sei konvergent. Folgt daraus die Konvergenz von $\sum_n a_n^2$? Sei zusätzlich $a_n \geq 0$ vorausgesetzt. Was läßt sich über die Konvergenz von $\sum_n a_n^2$ bzw. $\sum_n \sqrt{a_n}$ aussagen?

2.3. Beweisen Sie: Wenn $\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n = a \neq 0$ gilt, dann divergiert die Reihe $\sum a_n$.

2.4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und formulieren Sie das jeweils benutzte Konvergenzkriterium.

$$a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \qquad c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$d)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n \qquad e)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

2.5. Wann konvergieren die folgenden Reihen?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}},\ x \in \mathbb{R} \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+n^s}{b+n^t},\ a,b > 0,\ \ s,t \in \mathbb{N}$$

2.6. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x^n \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n \qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

2.7. Für welche $x \in \mathrm{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} n \left(e^{-x^2}\right)^n \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (\sin x)^n}{n^2} \qquad \text{d)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 n!}{(n+1)^n} (x-2)^n$$

2.8. Beweisen Sie mit Hilfe von Sätzen über Potenzreihen, daß e^x beliebig oft differenzierbar ist und daß $(e^x)' = e^x$ gilt.