Humboldt-Universität
Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 9 Sommersemester 2002

9.1. Es sei $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$. Ermitteln Sie eine Rekursionsformel für I_n und berechnen Sie I_n in Abhängigkeit davon, ob n gerade oder ungerade ist.

9.2. Beweisen Sie: Für jede in $[-1, 1]$ stetige Funktion f gilt:
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$.

9.3. Berechnen Sie:
a) $\int_x^1 \ln t dt$ für $x \in (0, 1)$ b) $\int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin t \cos t} dt$ für $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

9.4. a) Bestimmen Sie das unbestimmte Integral $\int e^y \sin y \;\, dy$ durch zweimalige partielle Integration.

b) Führen Sie durch Substitution das Integral $I(t) = \int\limits_1^t \sin(\ln x) \;\, dx$ für $t \geq 1$ auf ein Integral der Form $\int_a^b e^y \sin y \;\, dy$ zurück und geben Sie $I(t)$ an.

9.5. Konvergiert das uneigentliche Integral $I = \int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} \; dx$? Wenn ja, so bestimmen Sie seinen Wert.

9.6. Berechnen Sie die folgenden Integrale:
a) $\int\limits_0^b \frac{t}{3t^2+1} \; dt$. b) $\int\limits_1^3 x \ln x \; dx$. c) $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \; dt$.

9.7. Berechnen Sie als Integral das Volumen des Kegelstumpfes mit den Grundkreisradien r_1, r_2 mit $r_1 \geq r_2$ und der Höhe h.

9.8. Ein Massenpunkt P_i durchlaufe im angegebenen Zeitintervall den Weg $\gamma_i (i = 1, 2)$. Berechnen Sie jeweils den Geschwindigkeitsvektor, die Geschwindigkeit und die Länge des von P_i zurückgelegten Weges:
$\gamma_1 : [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^3, \gamma_1(t) = (r \cos t, r \sin t, ht)$ mit $h, r > 0$
$\gamma_2 : [0, 4\pi] \to \mathbf{R}^2, \gamma_2(t) = (r(t - \sin t), r(1 - \cos t))$ mit $r > 0$.