Humboldt-Universität
Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 8 Sommersemester 2002

8.1. Zeigen Sie:
a) Ist die reelle Funktion h stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und gilt $h(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ sowie $\int_a^b h(t)dt = 0$, so folgt $h(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.
b) Ist die reelle Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ für alle auf $[a, b]$ stetigen reellen Funktionen g, so folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Hinweis: Wählen Sie g so, dass Teil a) anwendbar wird.

8.2. Für welchen Wert von $a > 1$ begrenzt der Graph der Funktion $y = (\ln a) \cdot (\cos ax)$ mit der x-Achse Flächenstücke maximalen Inhalts?

8.3. Es sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, $f(x) \geq 0$, $f \not\equiv 0$ und in wenigstens einem Stetigkeitspunkt x_0 von f gelte $f(x_0) \neq 0$.
Beweisen Sie:
Es existiert eine Konstante $c > 0$ derart, dass $\int_a^b f(x)dx \geq c$ gilt.

8.4. Es sei f beschränkt und konkav in $[a, b]$. Dann ist f sogar stetig.
Beweisen Sie:
$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
Hinweis: Benutzen Sie eine elementargeometrische Definition von "konkav".

8.5. Ohne Benutzung des Logarithmus zeige man für die durch $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ definierte Funktion $L : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften:
a) $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$
b) $L'(1) = 1$
c) L wächst streng monoton und ist konkav.

8.6. F sei die Menge aller auf $[-1, 1]$ stetigen, reellwertigen Funktionen. Zwei Funktionen $f \in F$ und $g \in F$ sollen "integralgleich" heißen, in Zeichen $f \bowtie g$, wenn folgendes gilt: $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 g(x)dx$.
Zeigen Sie:
a) $\bowtie$ ist eine Äquivalenzrelation.
b) Jede Äquivalenzklasse von F enthält mindestens zwei Elemente.