Humboldt-Universität
Institut für Mathematik
Dr. Elke Warmuth

Analysisaufgaben Serie 1 Sommersemester 2002

1.1. Beweisen Sie: Für $a, b \geq 0$ gilt : a) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$ b) $\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$.

1.2. Sei $a = 10^{100}$ und

$$a_n = \sqrt{n^2 + a} - n,\ b_n = \sqrt{n^2 + n} - n,\ c_n = \sqrt{n^2 + \frac{n^2}{a}} - n$$

Beweisen Sie:

a) Für $1 \leq n < a$ gilt $a_n > b_n > c_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$

1.3. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folgen (a_n) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \frac{2n^5+3n^4+3}{8n^4-12n+6}$ b) $a_n = \sqrt[n]{2,5^n + 0,3^n + 3,8^n}$ c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$

d) $a_n = \frac{n!}{2n^n}$ e) $a_n = \frac{(3-\frac{1}{n})^{99}-(3+\frac{1}{n})^{99}}{(3-\frac{1}{n})-(3+\frac{1}{n})}$ f) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$

1.4. Beweisen Sie: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn die beiden Folgen $(\max\{a_n, 0\})$ und $(\min\{a_n, 0\})$ konvergieren.

1.5. Sei $0 < a_1 < 1$ und $a_{n+1} = a_n(2 - a_n), n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.

1.6. Weisen Sie nach, dass die Folge (a_n) mit $a_0 = 1, a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

1.7. Es sei (a_n) eine konvergente Folge *ganzer* Zahlen. Zeigen Sie, daß (a_n) schließlich konstant ist, d.h. es gibt ein $m \in N$, so daß $a_n = a_m$ für $n \geq m$.

1.8. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Folge (a_n)? Im Falle der Konvergenz bestimme man die Grenzwerte.

a) $a_n = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ b) $a_n = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$